TU ESCUELA EN CASA

Ministerio de EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA | entre todos

Actividad modular: Razones trigonométricas (Parte II)

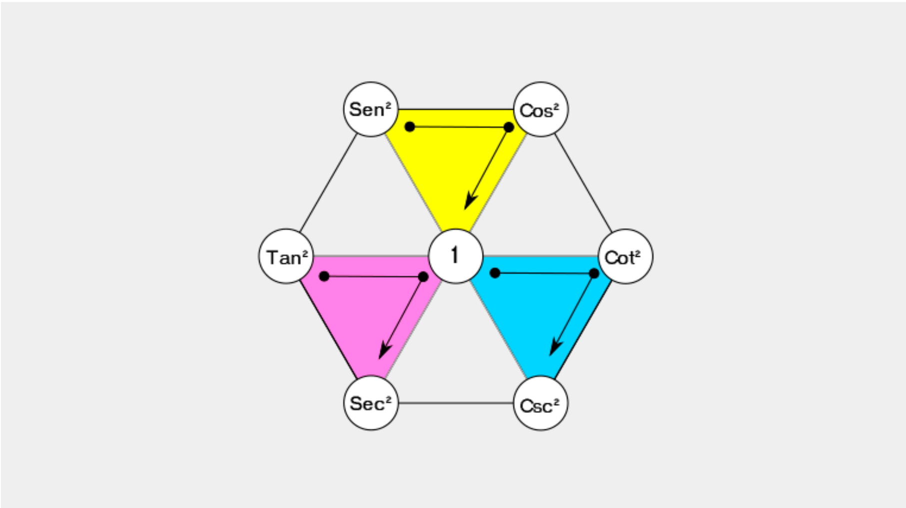
NIVEL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA / 3.° AÑO

MATEMÁTICA

Palabras clave: razones trigonométricas / trigonometría / triángulos rectángulos / semejanza de triángulos / relación pitagórica / identidades

ISEP

Actividad modular:
Razones trigonométricas (Parte II)



Fuente: Wikimedia

:: Presentación

En esta propuesta, continuaremos utilizando las razones trigonométricas para resolver situaciones problemáticas, descubrir otras relaciones y algunos de sus valores curiosos. Para esto, estaremos integrando varios conceptos de los ya abordados, como el Teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos.

¡Comencemos!

:: Desarrollo

En la actividad modular "**Razones trigonométricas**", construimos un teodolito y lo utilizamos para medir ángulos de elevación y, en combinación con las razones trigonométricas, calcular alturas como la del mástil del colegio o alguna pared muy alta que no podíamos medir.

Como les anticipamos en la presentación, en esta oportunidad, vamos a integrar varios conceptos ya trabajados. Les dejamos, a continuación, algunos de esos recursos para que puedan consultarlos cuando lo crean necesario.

Para recordar

Criterios de semejanza

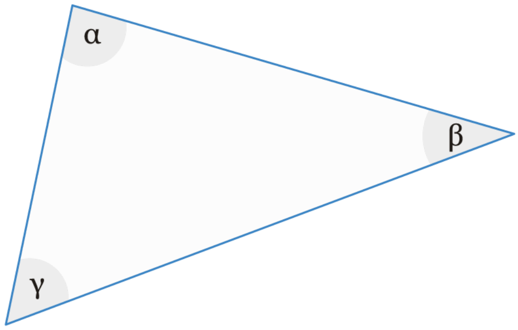
Son un conjunto de condiciones que permite asegurar que dos triángulos son semejantes, sin necesidad de verificar que todos los ángulos sean congruentes y todos los lados correspondientes sean proporcionales.

Estos criterios son

- **ángulo-ángulo (AA)**: si dos triángulos tienen dos de sus ángulos respectivamente congruentes, los triángulos son semejantes;
- **lado-ángulo-lado (LAL)**: si dos triángulos tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente congruente, los triángulos son semejantes;
- **lado-lado-lado (LLL)**: si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, los triángulos son semejantes.

Propiedad de los ángulos interiores de un triángulo

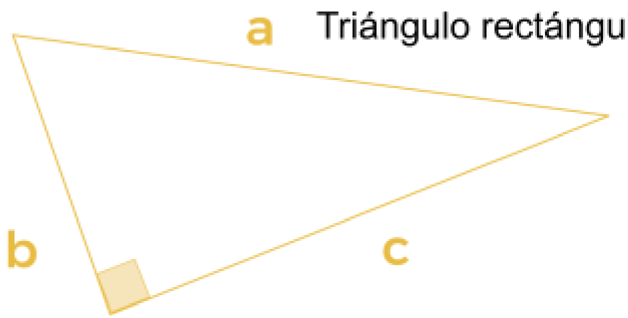
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°



En símbolos:

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma = 180°}$$

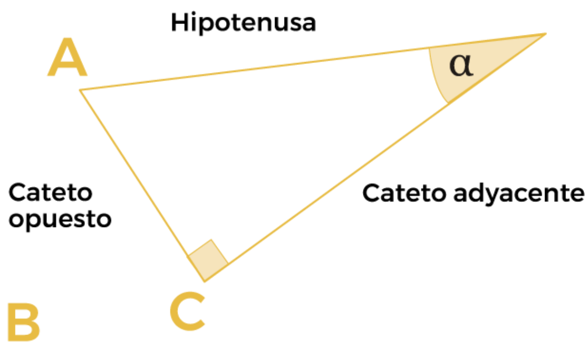
Teorema de Pitágoras



Triángulo rectángulo ⇔ $a^2 = b^2 + c^2$

Si y solo si

Razones trigonométricas



La hipotenusa siempre es el lado que se opone al ángulo recto.

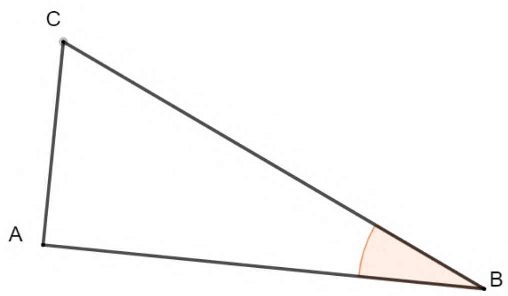
El cateto opuesto es el lado que se opone al ángulo que están considerando.

El cateto adyacente es el lado que forma el ángulo considerado con la hipotenusa.

Razón	Símbolo	Definición	Ejemplo
Seno	$sen\ (\alpha)$	$sen\ (\alpha)\ = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$	$sen\ (\alpha)\ = \frac{AC}{AB}$
Coseno	$cos\ (\alpha)$	$cos\ (\alpha)\ = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}$	$cos\ (\alpha)\ = \frac{CB}{AB}$
Tangente	$tg\ (\alpha)$	$tg\ (\alpha)\ = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$	$tg\ (\alpha)\ = \frac{AC}{CB}$

:: Momento 1

La profesora de matemática de Matías y Felipe dibujó en el pizarrón un triángulo rectángulo como se ve en la siguiente figura.



Luego, les preguntó a los chicos y chicas del curso si sería posible encontrar algún triángulo en el que el seno y el coseno de su ángulo α sean iguales.

Matías y Felipe se pusieron en acción, buscaron lápiz y papel, y arrancaron. Ahora, nosotros también. ¡Manos a la obra!

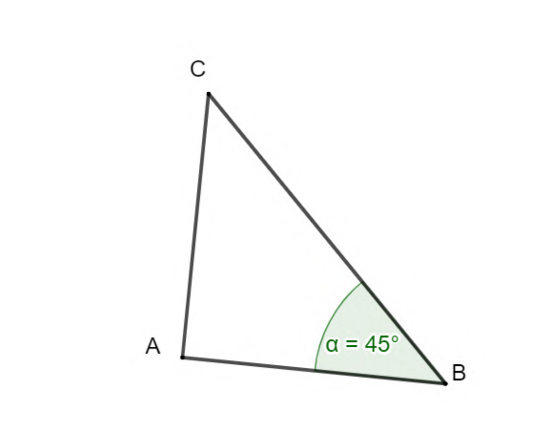
ACTIVIDAD 1

Les proponemos ayudar a Matías y Felipe. Comencemos resolviendo estas consignas:

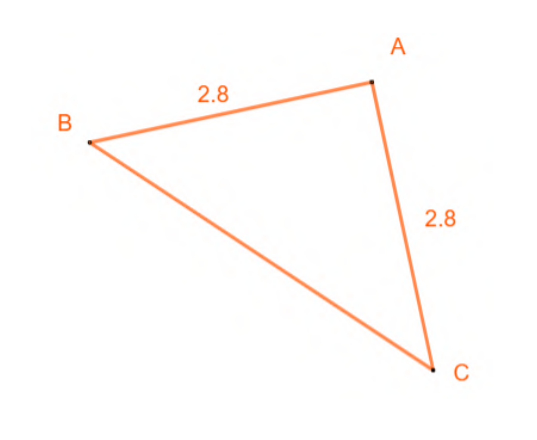
> **Pista:** para avanzar y ayudar a los chicos, necesitamos recordar cómo se calcula cada razón trigonométrica. Pueden consultar la sección **Para recordar** del apartado **Desarrollo**, en esta actividad modular.

Ahora sí, estamos listos, ¡largamos!

1) Dibujen un triángulo rectángulo.
2) Midan la longitud de cada lado del triángulo que dibujaron.
3) Elijan uno de sus ángulos interiores agudos, y determinen las razones seno y coseno para ese ángulo.
4) Comparen los valores obtenidos. ¿Son iguales?
5) Matías y Felipe, explorando posibilidades, dibujaron estos triángulos:



Matías



Felipe

Los estudiantes dicen que en estos triángulos coinciden los valores del seno y coseno para el ángulo alfa.

a) ¿Están de acuerdo con los chicos? ¿Por qué?
b) Si están de acuerdo, ¿serán los únicos triángulos que cumplan con esa condición? ¿Por qué?

Pista: para dar solución a lo solicitado en este punto, utilicen la propiedad de los ángulos interiores del triángulo y los criterios de semejanza. Pueden consultar la sección **Para recordar** del apartado **Desarrollo**, en esta actividad modular.

c) Si el triángulo no es único, ¿cómo deberían ser las medidas de los catetos y los ángulos interiores de un triángulo para que el valor del seno y del coseno coincidan?

Para verificar

En el caso de que tengan acceso a internet, en el siguiente *applet*: https://www.geogebra.org/m/wbsb7waa podrán observar qué condición debe cumplir un triángulo rectángulo para que los valores del seno y el coseno sean iguales.

:: Momento 2

En la actividad anterior, pudieron descubrir qué condición debe cumplir un triángulo rectángulo para que el seno y el coseno de un ángulo sean iguales. En este segundo momento, les proponemos acercarnos a algunas demostraciones matemáticas… sí, como lo hacen los matemáticos, ¡vamos a demostrar!

Sigan teniendo a mano todo lo que ya estudiamos juntos, va a ser nuestra caja de herramientas para animarnos a ser verdaderos matemáticos.

ACTIVIDAD 2

Felipe dibujó un triángulo rectángulo y, ensayando algunos cálculos e intentando generalizar, descubrió que la

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

¿Cómo imaginan que Felipe llegó a esa conclusión?

Para descubrir lo que pensó Felipe, resolvamos estas consignas:

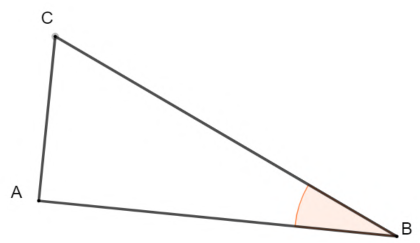
1) Dibujen el triángulo rectángulo ABC cuyos catetos miden: AB= 8 cm, BC=6 cm. Nombren uno de sus ángulos interiores como α.
2) Calculen el valor del seno, coseno y tangente para el ángulo α en el triángulo rectángulo ABC.
3) Sobre el triángulo dibujado, grafiquen otro triángulo semejante a este, de modo que compartan el ángulo α y que la hipotenusa mida 1 cm. A continuación, calculen el valor del seno, coseno y tangente para el ángulo α.
4) Comparen los valores hallados en el punto anterior. ¿Existe alguna relación entre los cálculos que hicieron, los lados del triángulo ABC y la conclusión de Felipe? ¿Por qué?
5) ¿Es necesario que la hipotenusa del triángulo rectángulo mida 1 cm para que se cumpla que $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$? ¿Por qué?

:: Momento 3

¡Ya son todos unos matemáticos! Como habrán podido comprobar, hay algunas relaciones entre las razones trigonométricas que son independientes del triángulo y el ángulo analizados. Dichas relaciones se denominan **identidades**. En esta última parte, los invitamos a conocer otra identidad.

ACTIVIDAD 3

1) Observen el triángulo rectángulo ABC, en donde a uno de sus ángulos interiores lo hemos llamado α.



a) Completen con los nombres de los segmentos necesarios para calcular el seno y el coseno:

$sen\,\alpha = \_\_$ y $cos\,\alpha = \_\_$

b) Ahora, eleven ambas expresiones al cuadrado, súmenlas y resuelvan:

$$(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = \_\_ + \_\_$$

$$(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = \_\_\_\_$$

Pista

Observen la expresión a la que llegaron en el numerador y recuerden la relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo propuesta por Pitágoras.

Entonces,

$$(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 =$$

2) Dado un triángulo rectángulo ABC, decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen sus respuestas:

a) El resultado del seno y del coseno para un ángulo agudo nunca es mayor a 1.
b) El resultado del coseno de 0° es igual al seno de 90°.
c) Si el $cos\,60° = \frac{1}{2}$ y además la relación $(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$,entonces el $sen\,60° = \sqrt{\frac{3}{4}}$.
d) El $cos\,30° = sen\,(90° - 30°)$.
e) Si el $cos\,\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$y $sen\,\gamma = \frac{1}{2}$, entonces la $tg\,\gamma = 2$.

Para estudiar

Llegamos al final de este recorrido. En esta secuencia de actividades, pudimos establecer algunas relaciones generales entre las razones trigonométricas denominadas **identidades**:

- $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$

- $(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$

Probablemente, se estén preguntando si estas identidades son las únicas. En la búsqueda de una respuesta, les proponemos que investiguen si existen otras identidades trigonométricas.

¡Hasta la próxima!

El/la maestro/a o el/la profesor/a les indicará dónde entregarán o compartirán la actividad resuelta.

ORIENTACIONES PARA LAS Y LOS DOCENTES

En esta secuencia de actividades, proponemos abordar contenidos del eje Geometría y medida, particularmente los referidos a razones trigonométricas y a la resolución de problemas con triángulos rectángulos. En esta oportunidad, nos centraremos en la aplicación de la trigonometría en situaciones intramatemáticas que posibilitarán un acercamiento al trabajo con identidades trigonométricas y a la idea de demostración matemática. Para ello, comenzaremos dando continuidad a la actividad modular "**Razones trigonométricas**", y recordaremos también lo trabajado sobre la relación pitagórica y semejanza de triángulos. De esta manera, iremos integrando contenidos geométricos y algebraicos.

Resulta importante, particularmente en la actividad 1, destinar un momento para la exploración de las construcciones. Así, los estudiantes podrán ensayar algunas conjeturas sobre las posibles relaciones y se promoverá el intercambio entre pares, para interpretar a qué se quiere llegar en cada caso e intentar arribar a algunas generalizaciones que conjuguen el trabajo geométrico con el algebraico, analizando también el error como parte constitutiva de toda medición. Cada docente tiene la oportunidad de adecuar y andamiar ese trabajo matemático en cada una de las actividades propuestas según lo considere para su grupo clase.

FICHA TÉCNICA:

Actividad: Razones trigonométricas (Parte II)

Nivel: Secundario
Curso sugerido: 3.º año
Asignatura: Matemática

Eje curricular: Geometría y medida

Objetivos:

- Emplear y explicitar las propiedades de figuras geométricas en la resolución de problemas.
- Utilizar y analizar las razones trigonométricas para resolver problemas extramatemáticos e intramatemáticos, recurriendo cuando sea posible al uso reflexivo de recursos tecnológicos y reconociendo el límite del modelo para comprender el problema.
- Usar expresiones algebraicas y analizar su equivalencia para resolver problemas extramatemáticos e intramatemáticos.
- Producir y validar enunciados sobre relaciones y propiedades numéricas y geométricas, sin recurrir a la constatación empírica.

Aprendizajes y contenidos:

- Utilización de razones trigonométricas para resolver problemas con triángulos rectángulos.
- Uso de instrumentos de geometría y programas graficadores para la construcción de figuras a partir de informaciones.
- Uso de relación pitagórica para triángulos rectángulos.

Sobre la producción de este material

Los materiales de *Tu Escuela en Casa* se producen de manera colaborativa e interdisciplinaria entre los distintos equipos de trabajo.

Autoría: Ana Antuña y Romina Prevero
Didactización: Esteban Cavalletto
Corrección literaria: Cecilia Villafañe
Diseño: Carolina Cena y Ana Gauna

Coordinación de *Tu Escuela en Casa*: Flavia Ferro y Fabián Iglesias

Citación:
Antuña, A.; Prevero, R. y equipos de producción del ISEP. (2021). Actividad modular: Razones trigonométricas (Parte II). *Tu Escuela en Casa*. Para el Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

COMUNIDAD DE PRÁCTICAS:
La clase en plural

La Comunidad de prácticas es un espacio de generación de ideas y reinvención de prácticas de enseñanza, donde se intercambian experiencias para hacer escuela juntos/as. Los/as invitamos a compartir las producciones que resulten de la implementación de esta propuesta en sus instituciones y aulas, pueden enviarlas a: tuescuelaencasa@isep-cba.edu.ar

Los contenidos que se ponen a disposición en este material son creados y curados por el Instituto Superior de Estudios Pedagógicos (ISEP), con el aporte en la producción de los equipos técnicos de las diferentes Direcciones Generales del Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba.